10 класс

1. Условие. В некотором пункте **A** в день весеннего равноденствия Солнце в верхней кульминации располагалось вдвое выше, чем в пункте **B** также в верхней кульминации, а его заход длился в полтора раза меньше, чем в пункте **B**. Найти широты обоих пунктов. Рефракцией пренебречь.

1. Решение. В день весеннего равноденствия склонение Солнца равно нулю, и его высота над горизонтом в верхней кульминации составляет

$$h = 90° - |\varphi|.$$

Здесь φ – широта места. При заходе за горизонт в точке запада Солнце движется под таким же углом $h = 90° - |\varphi|$ к горизонту, и продолжительность его захода равна

$$t = \frac{2\rho}{\omega \sin h}.$$

Здесь ω – угловая скорость видимого суточного вращения Солнца, ρ – его угловой радиус. По условию задачи, для пунктов **A** и **B** справедливы соотношения $h_A = 2h_B$, $t_A = 2t_B/3$. Подставим первое из них во второе:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{\sin h_B}{\sin h_A} = \frac{\sin h_B}{2\sin h_B \cos h_B} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда мы имеем $\cos h_B = 3/4$, $h_B = 41.4°$. Из этого мы получаем ответ на задачу:

$$\varphi_A = \pm\,(90° - 2h_B) = \pm 7.2°;$$
$$\varphi_B = \pm\,(90° - h_B) = \pm 48.6°.$$

1. Система оценивания. Для решения задачи участник должен связать высоту Солнца в верхней кульминации в день весеннего равноденствия и продолжительность его захода в этот день с широтой места или напрямую друг с другом. Эта связь оценивается в 3 балла (по 1 баллу за формулу для высоты в кульминации, формулу для длительности захода и составлении уравнения). Применение свойства синуса двойного угла либо иные способы решения уравнения и вычисление высоты Солнца в пунктах **A** и **B** оценивается еще в 3 балла (участники могут не записывать численные значения высот, а сразу переходить к широтам, что не является ошибкой и оценивается полностью).

Правильная запись ответа оценивается еще в 2 балла. Однако эти 2 балла не выставляются, если указаны только точки северного полушария с широтами 7.2° и 48.6°. Если случай южного полушария учитывается, но ответ формулируется в виде двух отдельных пар (+7.2°, +48.6°) и (–7.2°, –48.6°), то из 2 баллов выставляется только 1, так как такой ответ также неполон, точки **A** и **B** могут располагаться в разных полушариях. Правильный ответ содержит по два независимых значения широт либо указание четырех возможных пар. Участники могут округлить значения широты до 0.5° и 1°, что не является ошибкой.

2. Условие. Две малые планеты обращаются по круговым орбитам в том же направлении, что и Земля. Их синодические периоды одинаковы, а радиусы орбит отличаются вчетверо. Найти эти радиусы орбит.

2. Решение. Обозначим радиусы орбит двух планет (в астрономических единицах) как $R_{1,2}$. Тогда для периодов их обращения вокруг Солнца $T_{1,2}$ (в годах) справедливо соотношение:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{3/2} = 4^{3/2} = 8 \equiv K.$$

Все планеты вместе с Землей обращаются вокруг Солнца в одну сторону. Равные синодические периоды планет 1 и 2 могут быть в том случае, если одна из них (1, с меньшим расстоянием от Солнца) внутренняя, а вторая – внешняя. Период обращения Земли вокруг Солнца T_0 равен 1 году, поэтому для синодического периода мы имеем:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2};$$

$$\frac{K}{T_2} - 1 = 1 - \frac{1}{T_2}.$$

Отсюда мы получаем значение орбитального периода планет в годах:

$$T_2 = \frac{K+1}{2} = \frac{9}{2};$$

$$T_1 = \frac{T_2}{K} = \frac{K+1}{2K} = \frac{9}{16}.$$

Теперь мы можем найти радиусы орбит планет в астрономических единицах:

$$R_1 = T_1^{2/3} = \left(\frac{9}{16}\right)^{2/3} = 0.68 \text{ а.е;}$$

$$R_2 = T_2^{2/3} = \left(\frac{9}{2}\right)^{2/3} = 2.72 \text{ а.е.}$$

2. Система оценивания. Решение задачи разбивается на основные этапы:

1) Вычисление соотношения орбитальных периодов планет (2 балла). Это эквивалентно правильной записи (1 балл) и применению (1 балл) III закона Кеплера;

2) Указание на то, что одна из планет должна быть внутренней, а другая внешней (1 балл);

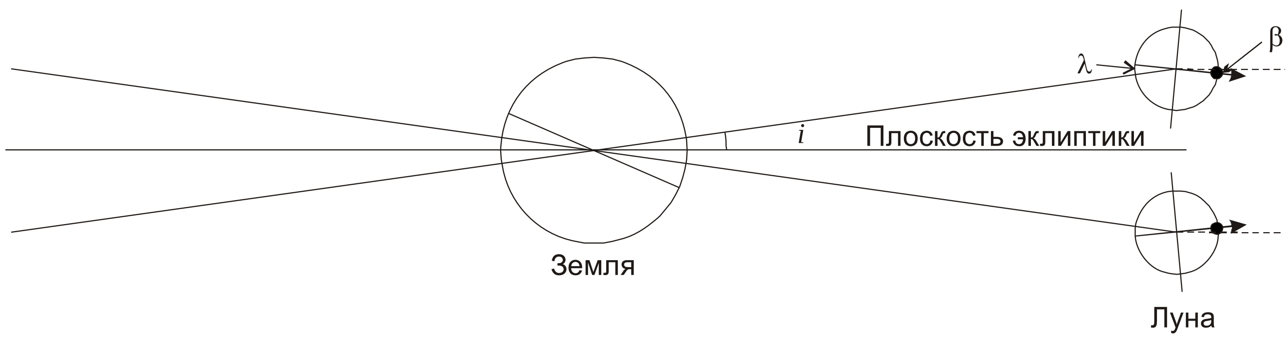
3) Вычисление самих периодов, исходя из равенства синодических периодов (3 балла);

4) Получение правильных числовых значений радиусов орбит планет (по 1 баллу за каждый ответ).

Все этапы можно выполнять как в общем виде, так и численно. В случае незначительных арифметических ошибок оценка за данный этап уменьшается на 1-2 балла, если же ошибки ведут к заведомо абсурдному ответу (например, периоды обеих планет одновременно больше или одновременно меньше одного года, радиусы орбит одновременно больше либо одновременно меньше одной астрономической единицы) – выставляется 0 баллов за текущий и последующие этапы решения.

3. Условие. Крупный неподвижный радиотелескоп установлен в центре обратного полушария Луны (селенографические координаты 180° долготы, 0° широты). Ось телескопа направлена в зенит, и телескоп может регистрировать объекты, удаленные от оси не более, чем на 2 градуса. Какая часть небесной сферы будет доступна наблюдениям с этим телескопом, если проводить наблюдения в течение 100 лет? При решении считать, что амплитуда либраций Луны по широте постоянна и равна 6°40′.

3. Решение. Если бы речь шла о кратковременных наблюдениях, например, в течение одного оборота Луны вокруг Земли, то ситуация представлялась бы очевидной: этому телескопу были бы доступны звезды с селеноцентрическим склонением от –2° до +2°, что соответствует площади на небе в 1440 кв. градусов = 0.439 стерадиан или 3.5% небесной сферы. Однако при увеличении интервала наблюдений можно расширить эту область неба.



Как известно, плоскость лунной орбиты наклонена к плоскости эклиптики (орбиты Земли) на угол i = 5°09′ и прецессирует относительно оси плоскости эклиптики с периодом 18.6 лет, меньшим интервала наблюдений. В то же время лунные либрации по широте имеют постоянную и чуть большую амплитуду λ = 6°40′. Причина этих либраций вызвана тем, что ось Луны наклонена на угол λ к нормали своей орбиты, и из-за этого в разные моменты времени мы можем наблюдать северные или южные приполярные области обратного полушария Луны. Это происходит вследствие того, что плоскость экватора Луны образует с плоскостью эклиптики угол $\beta = \lambda - i$ = 1.5° и также прецессирует с тем же периодом (фактически, это альтернативное выражение закона Кассини, сформулированного для движения Луны в 1693 году). В итоге, в различные периоды времени положение зенита для радиотелескопа будет отклоняться от эклиптики на угол 1.5°, и ему могут быть доступны объекты с эклиптической широтой b вплоть до 3.5° или 0.061 радиан. При этом эклиптическая долгота объекта в различное время может быть любой.

Так как угол b невелик, площадь кольца небесной сферы единичного радиуса между параллелями $\pm b$ может быть выражена как $4\pi b$. Доля площади всей сферы, занимаемая этим кольцом, равна

$$\eta = \frac{4\pi\, b}{4\pi} = b = 6.1\%.$$

3. Система оценивания. Основной этап задания состоит в вычислении максимального угла отклонения оси телескопа от плоскости эклиптики (или "средней плоскости лунного экватора"). Этот этап оценивается в 5 баллов, и при его выполнении возможно несколько стандартных ошибок. В частности, в качестве этого угла участники могут брать амплитуду изменения склонения Луны в небе Земли (среднюю 23.4° или максимальную 28.6°), в этом случае этап полностью не засчитывается (0 баллов). В качестве амплитуды может быть взята амплитуда либрации, 6°40′, или угол наклона лунной орбиты к эклиптике, 5°09′, в этих двух случаях за этап выставляется 2 балла. Если в качестве этого угла берется сумма углов λ и i, то есть около 12°, за этап также выставляется 2 балла.

Еще один вариант – предположение, что плоскость лунного экватора вообще не изменяет своего положения, и угол β равен нулю. В математическом плане это предположение достаточно близко к действительности, и в этом случае за выполнение этапа выставляется 3 балла.

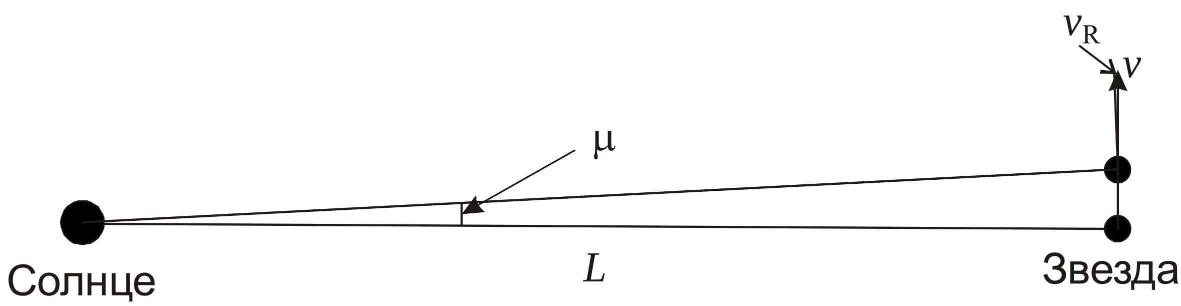
На последующем этапе участники должны прибавить к углу β величину 2° (1 балл) и вычислить долю площади небесной сферы (2 балла). Таким образом, этот этап оценивается в 3 балла, которые выставляются вне зависимости от правильности выполнения первого этапа задания.

4. Условие. Метеор наблюдался на поверхности Земли в обширной области радиусом 1000 км, и в двух наиболее удаленных друг от друга точках этой области он имел блеск 0^m. Какова была максимальная звездная величина метеора, видимая с поверхности Земли? Длиной пути метеора, рельефом Земли, атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

4. Решение и система оценивания. См. задание 4 для 9 класса.

5. Условие. Мимо Солнца на небольшом расстоянии пролетела другая звезда с меньшей массой. В период максимального сближения гелиоцентрическое собственное движение звезды составило 1000″ в год, а длина волны линии Hα (6563 ангстрема) в ее спектре за один год увеличилась на 0.010 ангстрем. Найдите минимальное расстояние между Солнцем и звездой.

5. Решение. Судя по собственному движению, звезда пролетела достаточно близко к Солнечной системе. Увеличение длины волны спектральной линии связано с тем, что звезда сначала приближалась, а потом удалялась от нас. Так как смещение указано за один целый год, движение Земли в оба момента было одним и тем же и не могло повлиять на изменение длины волны. Рассмотрим моменты наибольшего сближения звезды и Солнца и через год после него в системе отсчета, связанной с Солнцем:



В момент наибольшего сближения звезда движется со скоростью v перпендикулярно направлению на Солнце, и лучевой гелиоцентрической скорости у нее нет. Через год звезда смещается на угол μ (1000″), и у нее появляется положительная лучевая скорость:

$$v_R = v \sin \mu.$$

Эта скорость вызывает смещение линий в ее спектре:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_R}{c} = \frac{v}{c} \sin \mu.$$

Отсюда мы определяем полную скорость звезды:

$$v = \frac{c}{\sin \mu} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 95 \text{ км/с}.$$

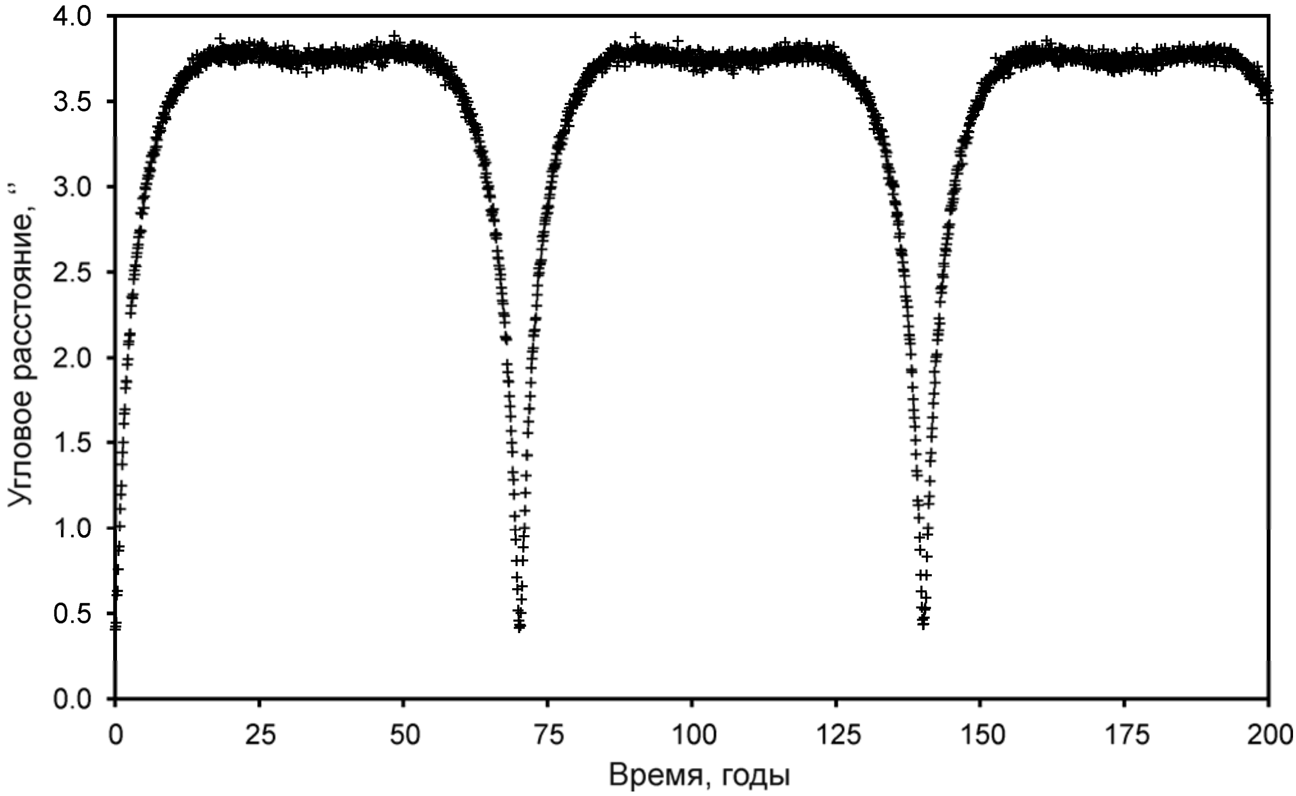
Теперь мы можем найти и минимальное расстояние до звезды:

$$L = \frac{vT}{\sin\mu} = \frac{cT}{\sin^2\mu}\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 4100 \text{ а.е.} \approx 0.02 \text{ пк.}$$

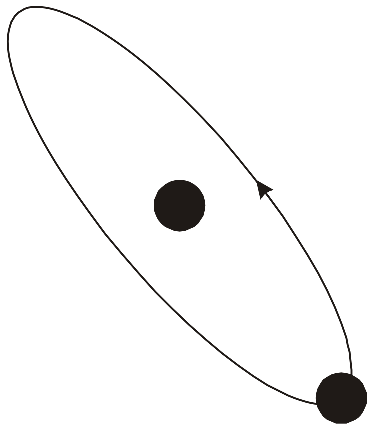
Здесь время *T* соответствует одному году.

5. Система оценивания. Первым этапом решения задания является запись выражения для скорости пролета звезды мимо Солнца либо ее вычисление. Этап оценивается в 4 балла при обязательном условии правильной интерпретации смещения спектральной линии. Без этого, даже при ответе, близком к правильному, этап не засчитывается. На втором этапе участники определяют минимальное расстояние до звезды, и это также оценивается в 4 балла.

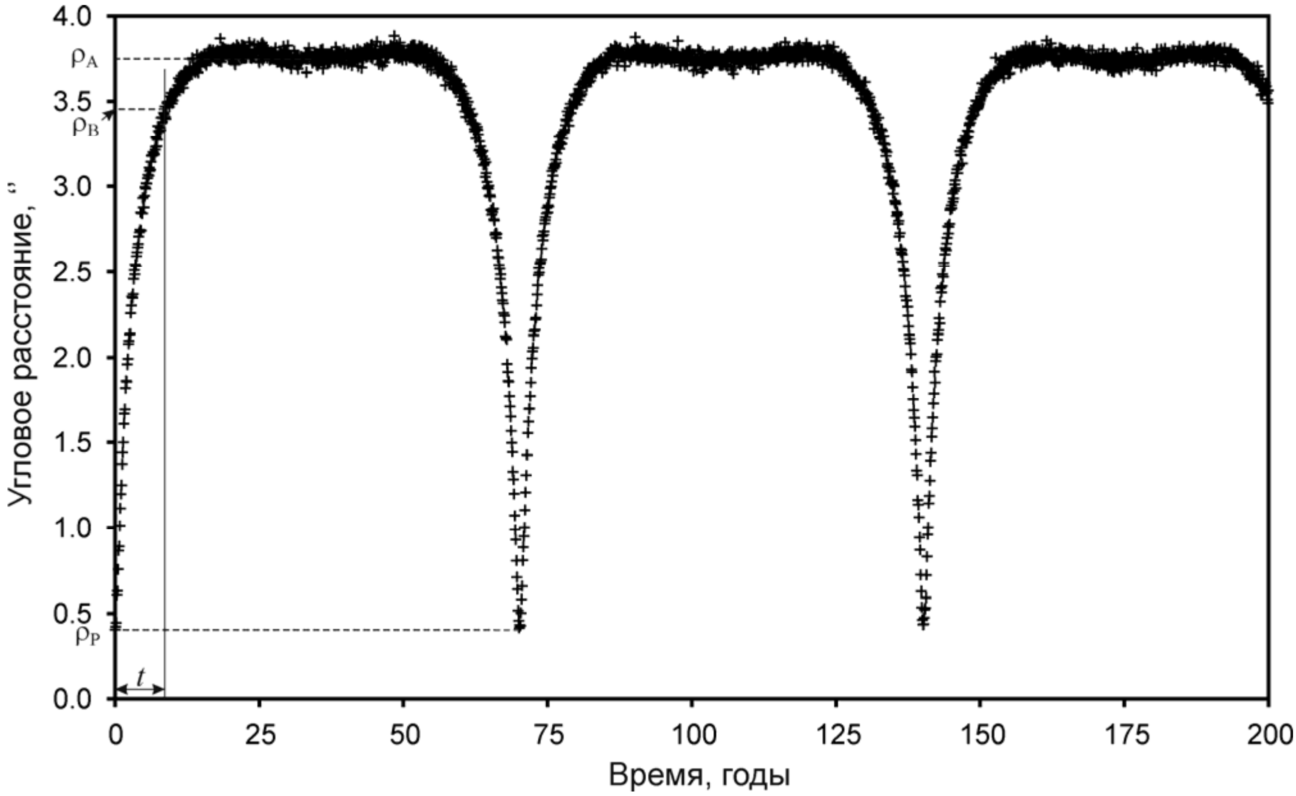
6. Условие. Двойная система состоит из одинаковых компонент, подобных Солнцу. На графике приведена зависимость углового расстояния между ними (в угловых секундах) в небе Земли от времени. Определите эксцентриситет орбиты, наклон плоскости орбиты к лучу зрения и расстояние до системы.



6. Решение. Зависимость углового расстояния между звездами характеризуется резкими минимумами, между которыми эта величина практически постоянна. Такая зависимость больше похожа на кривую блеска затменной переменной. Если же говорить об угловом расстоянии, то начать следует с вывода о том, что орбиты звезд в системе явно не круговые. Будем считать одну из звезд неподвижной, рассматривая движение второй звезды относительно первой. Очевидно, это не меняет форму орбиты. Будь эта орбита круговой, пусть даже и наклоненной к лучу зрения, в проекции на небесную сферу она представлялась бы эллипсом с центром, совпадающим с положением звезды, которую мы считаем неподвижной. В этом случае угловая зависимость имела два одинаковых максимума и два одинаковых минимума по ходу орбитального периода, что не соответствует условию.



Рассмотрим теперь случай эллиптических орбит. На картине мы видим острый минимум, а вся зависимость симметрична относительно этого минимума. Такое может быть, если этот минимум соответствует перицентру орбиты звезды. Отсюда мы сразу можем определить орбитальный период системы T, равный 70 годам.



В момент перицентра угловое расстояние между звездами составляет ρ_P=0.4″. В апоцентре звезда оказывается через половину периода, и тогда угловое расстояние равно ρ_A=3.75″. Неподвижная звезда, перицентр и апоцентр находятся в пространстве на одной прямой, поэтому вне зависимости от ориентации орбиты эти видимые расстояния относятся друг к другу так же, как и пространственные расстояния в перицентре и апоцентре. Отсюда мы получаем эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{\rho_A - \rho_P}{\rho_A + \rho_P} = 0.8.$$

Изобразим на рисунке орбиту звезды и ее проекцию на небесную сферу. Возьмем момент пересечения звездой малой оси эллипса. В этот момент расстояние от этой звезды до оси составляет

$$b = a\sqrt{1-e^2} = 0.6\,a.$$

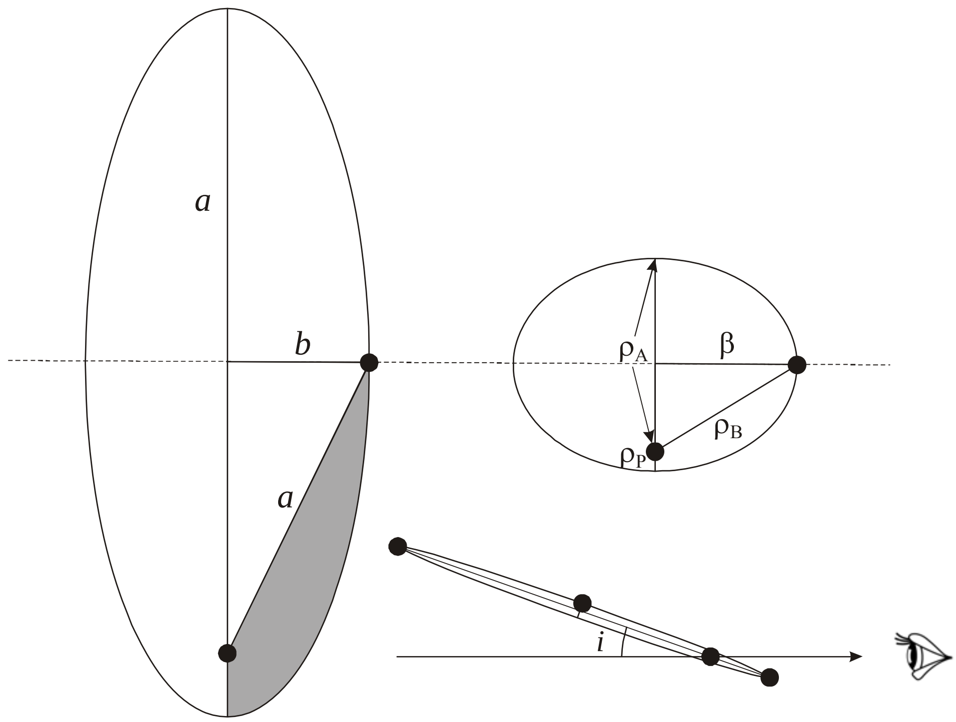
Рассчитаем, какую часть орбитального периода звезда затрачивает на путь от перицентра до указанного положения. В соответствии со II законом Кеплера, это есть отношение площади, проходимой радиус-вектором (заштрихованной на рисунке) к площади эллипса. Заштрихованную площадь можно найти как разность площадей четверти эллипса и треугольника. Итак, отношение времен есть

$$\frac{t}{T} = \frac{(\pi ab/4) - (aeb/2)}{\pi ab} = \frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi} = 0.12; \quad t = 8.6 \text{ лет}.$$

Тот же самый результат можно найти с помощью уравнения Кеплера:

$$E - \mathrm{e}\sin E = 2\pi t / T.$$

В данном случае эксцентрическая аномалия (угол с вершиной в центре эллипса, образованный направлениями на перицентр и тело) $E = \pi/2$, что приводит к тому же значению t.



По графику мы определяем угловое расстояние между звездами в этот момент ρ_B=3.45″. Из симметрии кривой из условия задания мы можем заключить, что линия узлов орбиты (линия ее пересечения с небесной сферой) также симметрична относительно линии апсид орбиты, то есть совпадает или перпендикулярна ей. Так как величина ρ_B лишь ненамного меньше максимального углового расстояния ρ_P, мы можем сделать вывод, что реализуется второй вариант, изображенный на рисунке справа. Мы можем определить видимые размеры малой полуоси эллипса:

$$\beta = \sqrt{\rho_B^2 - \left(\frac{\rho_A - \rho_P}{2}\right)^2} = 3.0''.$$

Если бы орбита лежала в картинной плоскости (на небесной сфере), то большая полуось эллипса составила бы

$$\alpha_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1-e^2}} = 5.0''.$$

В действительности она равна $\alpha = (\rho_A + \rho_B)/2 = 2.1''$. Теперь мы можем найти угол наклона орбиты к лучу зрения:

$$i = \arcsin\frac{\alpha}{\alpha_0} = 25^{\circ}.$$

Нам остается найти расстояние до системы. Так как орбитальный период T равен 70 годам, а суммарная масса звезд M равна 2 массам Солнца, мы можем найти среднее расстояние между звездами из обобщенного III закона Кеплера в астрономических единицах:

$$A = (T^2 M)^{1/3} = 21.4 \text{ а.е.}$$

Будь большая полуось перпендикулярна лучу зрения, мы бы видели ее под углом α_0, равным $5''$. Таким образом, расстояние до системы в парсеках составляет

$$L = (21.4 / 5.0) = 4.3 \text{ пк.}$$

6. Система оценивания. Решение задания состоит из трех базовых этапов: вычисление эксцентриситета орбиты, наклона ее плоскости к лучу зрения и расстояния до системы. Первый из этих этапов выполняется независимо от остальных и оценивается в 2 балла. Допускаются значения от 0.77 до 0.83, вызванные ошибками измерений. Однако если в качестве апоцентрического расстояния соответствующее максимальному угловому расстоянию между звездами (3.8″), то за этап выставляется только 1 балл. При каких-либо других предположениях относительно расположения орбиты и неверных вычислениях эксцентриситета за этап выставляется 0 баллов.

Самый объемный и важный этап выполнения задания – вычисление угла наклона орбиты к лучу зрения, этап оценивается в 4 балла. Для его выполнения участники должны понять, что в картинной плоскости находится малая ось эллипса. При иных предположениях относительно расположения за весь этап выставляется 0 баллов. В то же время, сами вычисления можно делать разными способами, а не только описанным выше. В частности, можно определять не малую ось, а фокальный параметр эллипса в пространстве и на небе, хотя этот способ предусматривает более сложное вычисление доли орбитального периода между перицентром и данной точкой.

При выполнении этапа участник может спутать видимый размер малой оси (β) и угловое расстояние между звездами в этот момент (r_B). Такая ошибка приводит к снижению оценки за этап на 3 балла, но остальные этапы при условии их выполнения оцениваются полностью. Допустимая погрешность определения угла наклона составляет 5°. При его вычислении участник может спутать его с дополнением до 90°, величина составляет 65°. Если при этом будет правильно сказано, что вычислен угол между орбитой и картинной плоскостью – оценка не снижается, если этого объяснения нет – оценка снижается на 1 балл.

Третий этап заключается в определении расстояния до двойной звезды. Этот этап состоит из применения III закона Кеплера и сопоставлении видимого размера орбиты с ее видимым размером, каждый из шагов оценивается по 1 баллу. Первый шаг оценивается при любом выполнении первых двух этапов и определяется только правильностью применения III закона Кеплера. Второй шаг оценивается только при учете правильного расположения орбиты, определенного в первых двух этапах решения. Если участник не учитывает фактор массы M=2 в III законе Кеплера, третий этап (оба балла) не засчитывается.